МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації самостійної роботи
і проведення практичних занять
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

(для студентів 1 курсу денної форми навчання

спеціальності 101 – Екологія)

Модуль1

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з дисципліни «Вища математика» (для студентів 1 курсу денної форми навчання спеціальності 101 – Екологія) Модуль 1 / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. П. Вороновська. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 89 с.

Укладач канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 5 від 25.12.2019.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1 Похідна і диференціал функції

Поняття похідної є одним з основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв'язанні інженерних, економічних та управлінських задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $f(x)$позначають одним із символів: $f'(x), y'(x), y', \frac{dy}{dx}$

Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням.* Функція $y = f(x)$, яка має похідну в кожній точці інтервалу $(a; b)$, називається *диференційованою в цьому інтервалі*.

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$.

Правила диференціювання

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дві диференційовані в інтервалі (a, b) функції, тоді мають місце наступні правила:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v\prime}{v^2}$; 4. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

5. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$; 6. $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot lnu \cdot v'$.

Таблиця похідних

1. $(C)' = 0;$ 2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2а. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$ 2б. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u';$

3. $(a^u)' = a^u \cdot ln\, a \cdot u';$ 3а. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

4. $(log_a\, u)' = \frac{1}{u \cdot ln\, a} \cdot u';$ 4а. $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

5. $(sinu)' = cosu \cdot u';$ 6. $(cosu)' = -sinu \cdot u'$

7. $(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u';$ 8. $(ctgu)' = \frac{-1}{sin^2 u} \cdot u';$

9. $(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$ 10. $(arccosu)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$ 12. $(arcctgu)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.$

Приклад. Знайти похідні від функцій:

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30,$ б) $y = tg3x^2,$

в) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3},$ г) $y = cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{12},$

д) $y = arcctg^5 x \cdot log_5(x^2 + 2),$ ж) $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{sinx}}.$

Розв'язання.

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$,

дана функція є сумою степеневих функцій і сталої величини. Похідні від степеневих функцій знаходимо за другою формулою в таблиці похідних, пам'ятаючи перше правило диференціювання, похідну сталої величини шукаємо за першою формулою в таблиці:

$$y' = (5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30)' =$$
$$= 40x^7 - 100x^{24} + 15x^4 - 60x^2 + 24x + 7.$$

б) $y = tg3x^2, \quad y' = (tg3x^2)' = \frac{1}{cos^2 3x^2} \cdot (3x^2)' = \frac{1}{cos^2 3x^2} \cdot 6x = \frac{6x}{cos^2 3x^2}$;

у цьому випадку знаходили похідну, користуючись сьомою формулою таблиці похідних, де $u = 3x^2$;

в) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3}$,

використовуючи десяту формулу таблиці похідних, де $u = \sqrt{5x^4 - 3}$. В свою чергу $u = u(v)$, де $v = 5x^4 - 3$. Отже, знаходимо:

$$y' = \left(arccos\sqrt{5x^4 - 3}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4 - 5x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^4 - 3}} \cdot (5x^4 - 3)' = \frac{-10x^3}{\sqrt{4 - 5x^4} \cdot \sqrt{5x^4 - 3}}.$$

г) $y = cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{12}$,

спочатку розкладемо похідну за другим правилом диференціювання, потім використаємо формули з таблиці похідних:

$$y' = (cos2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + cos2x^3 \cdot ((5x - 2)^{12})' =$$

$$= -sin2x^3 \cdot (2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + cos2x^3 \cdot 12(5x - 2)^{11} \cdot (5x - 2) =$$

$$= -6x^2 sin2x^3 \cdot (5x - 2)^{12} + 60cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{11}.$$

д) $y = arcctg^5 x \cdot log_5(x^2 + 2)$,

знаходимо похідну також, як у прикладі е) :

$$y' = (arcctg^5 x)' \cdot log_5(x^2 + 2) + arcctg^5 x \cdot \left(log_5(x^2 + 2)\right)' =$$

$$= 5arcctg^4 x(arcctgx)' log_5(x^2 + 2) + arcctg^5 x \frac{1}{(x^2 + 2)ln5}(x^2 + 2)' =$$

$$= \frac{-5arcctg^4 x \cdot log_5(x^2 + 2)}{1 + x^2} + \frac{2x \cdot arcctg^5 x}{(x^2 + 5)ln5}.$$

ж) $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{sinx}}$,

в цьому прикладі спочатку використовуємо третє правило диференціювання, потім – формули з таблиці похідних:

$$y' = \frac{((4x+2)^2)' \cdot e^{sinx} - (4x+2)^2 \cdot \left(e^{sinx}\right)'}{(e^{sinx})^2} =$$

$$= \frac{2(4x+2)(4x+2)'e^{sinx} - (4x+2)^2 e^{sinx}(sinx)'}{e^{2sinx}} =$$

$$= \frac{e^{sinx}(8(4x+2) - (4x+2)^2 cosx)}{e^{2sinx}} = \frac{(4x+2)(8-(4x+2)cosx)}{e^{sinx}}$$

1.2 Похідна параметрично заданої функції

Нехай функцію задано у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані, коли параметр $t \epsilon (\alpha; \beta)$. Нехай функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0 \epsilon (\alpha; \beta)$ похідна $x_t' \neq 0$), тоді має місце формула

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}. \qquad (*)$$

Приклад. Знайти y_x', якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходимо $x_t' = (1 - t^2)' = -2t$ і $y_t' = (t - t^3)' =$

$= 1 - 3t^2$. Підставляючи знайдені вирази для x_t' і y_t' до формули $(*)$, дістанемо

$$y_x' = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, дістанемо:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}.$$

1.3 Похідна неявно заданої функції

Якщо функція задана рівнянням $F(x,y) = 0$ (неявно), то для знаходження похідної від y по x необхідно: продиференціювати рівняння по x, вважаючи, що y є функцією від x (тобто $(x)' = 1$, $(y)' = y'$); отримане рівняння слід розв'язати відносно y'.

Приклад. Знайти y'_x, якщо $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$.

Розв'язання. Диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2yy' - 15x^4 + 16xy^3 + 24x^2y^2y' = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y':

$$2yy' + 24x^2y^2y' = 15x^4 - 16xy^3, \qquad y'(2y + 24x^2y^2) = 15x^4 - 16xy^3,$$

$$y' = \frac{15x^4 - 16xy^3}{2y + 24x^2y^2}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $sin2x + cos3y = sin^2y + 1.$

Розв'язання. Диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x:

$$2cos2x - 3sin3y \cdot y' - 2siny \cdot cosy \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$y' \cdot (3sin3y + 2siny \cdot cosy) = 2cos2x,$$

$$y' = \frac{2cos2x}{3sin3y + 2siny \cdot cosy}.$$

1.4 Логарифмічне диференціювання

1) Якщо функція $y = f(x)$ являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

Приклад. Знайти y', якщо $y = \frac{\sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x}{\sqrt[4]{cosx}}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$lny = ln\left(\frac{\sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x}{\sqrt[4]{cosx}}\right),$$

$$lny = \frac{1}{5}lnsinx + 2lnarctgx - \frac{1}{4}lncosx,$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, пам'ятаючи, що $(x)' = 1,\ (y)' = y'$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{cosx}{sinx} + \frac{2}{arctgx} \cdot \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{sinx}{cosx},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1 + x^2)} + \frac{tgx}{4},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} + \frac{tgx}{4}\right),$$

$$y' = \frac{\sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2 x}{\sqrt[4]{cosx}} \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} + \frac{tgx}{4}\right).$$

2) Похідна показниково-степеневої функції.

Функція $y = (u(x))^{v(x)}$ називається *показниково-степеневою* функцією.

Приклад. Знайти y′, якщо $y = (x^2+1)^{sinx}$.

Розв'язання. $lny = ln(x^2+1)^{sinx}$, $\qquad lny = sinx \cdot ln(x^2+1)$,

Диференціюємо обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{y'}{y} = cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}.$$

Знаходимо y': $\qquad y' = y \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$

На місце y записуємо вихідну функцію:

$$y' = (x^2+1)^{sinx} \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Остаточно:

$$y' = (x^2+1)^{sinx-1} \cdot \left((x^2+1)cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + 2xsinx\right).$$

Приклад. Знайти y′, якщо $y = (arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}$.

Розв'язання. $lny = ln(arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}$,

$$lny = ln(2x+1) \cdot ln(arctg\sqrt{x}) \ ,$$

$$\frac{y'}{y} = (ln(2x+1))' \cdot lnarctg\sqrt{x} + ln(2x+1) \cdot \left(lnarctg\sqrt{x}\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+1)'}{2x+1} \cdot lnarctg\sqrt{x} + ln(2x+1) \cdot \frac{\left(arctg\sqrt{x}\right)'}{arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} \cdot lnarctg\sqrt{x} + ln(2x+1) \cdot \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{(1+x) \cdot arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2lnarctg\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot arctg\sqrt{x}},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2lnarctg\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot arctg\sqrt{x}}\right),$$

$$y' = \left(arctg\sqrt{x}\right)^{ln(2x+1)} \cdot \left(\frac{2lnarctg\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot arctg\sqrt{x}}\right).$$

1.5 Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ та $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

Теорема (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ $\varphi(x)$ і неперервні і диференційовані в деякому околі точки $x_0 = a$, тобто $0 < |x - a| < \varepsilon$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, тоді якщо існує скінчена або нескінчена границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x \to a$, то відношення функцій має ту ж границю, тобто:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| \text{ або } \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 1. Твердження теореми залишається в силі, якщо $a = \infty$, тобто:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| \text{ або } \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 2. Існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірно, оскільки границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних.

Зауваження 3. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ будуть відповідати сформульованій теоремі, то можна гарантувати відношення других похідних і т.д.. Тобто, правило Лопіталя можна застосовувати послідовно декілька разів.

Зауваження 4. Інші невизначенності необхідно тотожньо перетворювати до розглянутих: $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, щоб застосувати правило Лопіталя.

Приклад. Знайти границі функцій

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{ln(5+3x)}{2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5+3x}}{2}=\frac{3}{10}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{5x}}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5e^{5x}}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25e^{5x}}{2}=\frac{\infty}{2}=\infty$; (Застосували правило Лопіталя двічі)

б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot lnx=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{1/x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$;

(Виконали тотожнє перетворення $|0\cdot\infty|$ до $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

в) $\lim\limits_{x\to 1}lnx\cdot ln(x-1)=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{1/lnx}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1/x-1}{-1/x\cdot(lnx)^2}=$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1}==\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{(lnx)^2+\frac{2xlnx}{x}}{1}=0$; (Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=|\infty-\infty|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2};$$

(Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

д) $\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A$,

функція є показниково-степеневою, тому позначимо границю функції через A , та прологарифмуємо її:

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0}ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}tgx \cdot lnarcsinx = \lim_{x\to 0}\frac{lnarcsinx}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$

Отримали границю відношення функцій, до якої можна застосувати правило Лопіталя. Після його застосування маємо:

$$lnA = \lim_{x\to 0}\frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsinx} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{1} = 0\,,$$

Далі скористалися еквеквівалентністю нескінченно мали.

Отже, $lnA = 0$ і тоді $A = e^0 = 1$.

1.6 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

1.6.1 Зростання і спадання функції

Теорема. Для того, щоб диференційована на проміжку $(a;b)$ функція $f(x)$ зростала (спадала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$ при будь – якому $x \in (a;b)$.

Приклад. Знайти проміжки зростання і спадання функції $y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції: $x \neq 4$, тобто $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$y' = \frac{(2x-4)(x-4)-(x^2-4x+1)}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-8x-4x+16-x^2+4x-1}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2-8x+15}{(x-4)^2} = \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2}; y' = 0; \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2} = 0.$$

Відкіля знаходимо корені похідної: $x = 5$ і $x = 3$. На рисунку 1 зображено інтервали зростання і спадання даної функції.

Знак y':

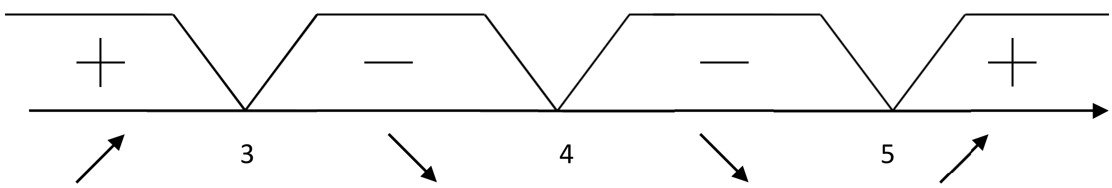

Рисунок 1

Зробимо висновок, що функція зростає, коли $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, функція спадає, коли $x \in (3; 4) \cup (4; 5)$.

1.6.2 Максимум і мінімум функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 і її околі. Точка x_0 називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $f(x)$, якщо значення функції у точці x_0 більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки x_0: $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $\big($або $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)\big)$, коли $\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$.

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами* або *екстремальними значеннями функції.*

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум або мінімум, то необхідно,щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Зауважимо, що умова $f'(x_0) = 0$ не є достатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ її похідна $y' = 3x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$, але $x = 0$ не є точкою екстремуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними.*

Теорема (достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – є точкою мінімуму.

Приклад. Знайти критичні точки та проміжки зростання і спадання функції: $y = x^3 - 3x$.

Розв'язання. Нагадуємо, що будь – яке дослідження функції необхідно розпочинати з находження її області визначення. Тут $D(y) = R$.

Похідна цієї функції: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

При переході через точку $x_0 = -1$ похідна функції змінює знак з «+» на «−», тобто в точці $x_0 = -1$ знаходиться максимум функції. При переході через точку $x_0 = 1$ похідна функції змінює знак з «−» на «+», в точці $x_0 = 1$ знаходиться мінімум функції.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$. Максимум її знаходиться в точці $x_0 = -1$, мінімум − в точці $x_0 = 1$.

1.6.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на проміжку $(a; b)$.

Графік функції $f(x)$ називається *опуклим (угнутим)* на проміжку $(a; b)$, якщо усі точки кривої $f(x)$ розташовані нижче (вище) точок дотичної, проведеної у будь – якій точці графіка на цьому проміжку.

Точку графіка функції $f(x)$, у якій змінюється напрямок опуклості, називають *точкою перегину.*

Теорема (достатня умова існування точок перегину).

Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

Приклад. Дослідити функцію $y = x^5 - 2x + 5$ на опуклість і знайти точки перегину.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = R$. Знайдемо першу і другу похідні даної функції: $y' = 5x^4 - 2$, $y'' = 20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y'' = 0$ при $x = 0$. Тому $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Отже, графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ є опуклим вгору на проміжку $(-\infty; 0)$ і опуклим вниз на проміжку $(0; \infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

1.6.4 Асимптоти графіка функції

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує нуля, якщо ця точка рухається вздовж графіка функції до нескінченності.

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$**,** якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Рівняння *похилої асимптоти* будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b, \text{ де } \quad k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx).$$

Якщо хоча б одна з границь при знаходженні k і b не існує або дорівнює ∞, то похилих асимптот немає.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функцій $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Шукаємо вертикальні асимптоти графіка функції :

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = -\infty\,; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty\,;$$

звідси $x = -1$ і $x = 1$ є вертикальними асимптотами.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 1\,,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} =$$

$$= 0.$$

Підставляючи $k = 1$ і $b = 0$ в рівняння $y = kx + b$, отримаємо: $y = x$, це шукана похила асимптота.

1.6.5 Повне дослідження функції

План дослідження функції:

1. знайти область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2. дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3. знайти точки перетину графіка фунції з осями координат;
4. дослідити поведінку функції на нескінченності;
5. знайти інтервали монотонності та екстремуми функції;
6. знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції;
7. знайти асимптоти графіка функції;
8. побудувати ескіз графіка функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями даної функції.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати ескіз її графіка.

1. Область визначення: $x \neq \pm 1$; тобто

$$D(y) \epsilon (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Прямі $x = \pm 1$ служать вертикальними асимптотами, тому що

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

2. Обчислимо $y(-x) = \dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$, тобто виконується рівність $y(-x) = y(x)$, одже, функція парна і її графік симетричний відносно осі Oy.

3. Точка перетину з віссю Oy: $x = 0; y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$. Маємо точку $A(0;1)$. Точок перетину з віссю Ox нема. При $y = 0$, рівняння $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$ не має рішень.

4. Обчислюємо: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, тобто пряма $y = -1$ служить горизонтальною асимптотою.

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$$y = kx + b.$$

Знайдемо параметри k та b:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1-3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{-6x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

Таким чином, отримали горизонтальну асимптототу: $y = -1$.

5. Інтервали монотонності та екстремуми.

Знайдемо $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$$

$y'(x) = 0$, якщо $x = 0$ та $y'(x)$ не існує, якщо $x = \pm 1$ тобто критичною є тільки точка $x = 0$, оскільки точки $x = \pm 1$ не належать області визначення функції.

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на рисунку 2.

Визначимо знак $y'(x)$:

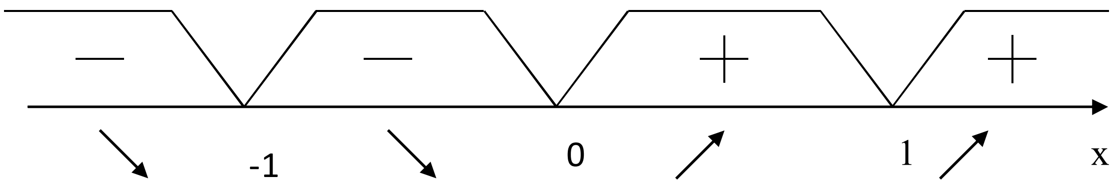

Рисунок 2

На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(-1,\ 0)$ функція спадає, оскільки тут $y'(x) < 0$.

На інтервалах $(0, 1)$ та $(1, \infty)$ функція зростає, оскільки тут $y'(x) > 0$.

Зміна знаку похідної при переході через точку $x = 0$, вказує на те, що точка $B(0;1)$ є точкою екстремуму функції: $y_{min} = y(0) = 1$.

6. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції.

Знайдемо другу похідну даної функції:

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2 \cdot (1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на рисунку 3.

Визначимо знак $y''(x)$:

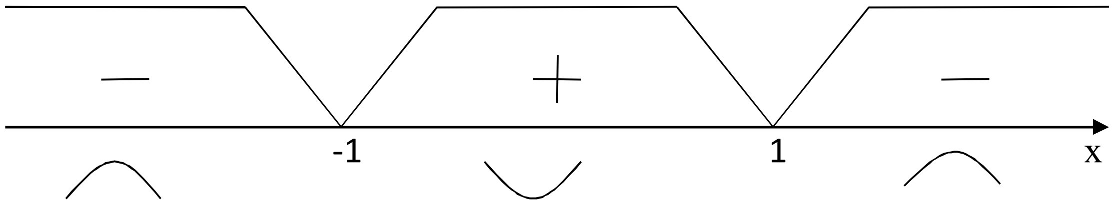

Рисунок 3

На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, \infty)$ графік функції опуклий, тому що тут $y''(x) < 0$. На інтервалі $(-1, 1)$ графік функції угнутий, тому що тут $y''(x) > 0$. Точок перегину немає.

7. Асимптоти графіка функції знайдені у п.1 і п.4.

8. Побудуємо ескіз графіка, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 4) функції:

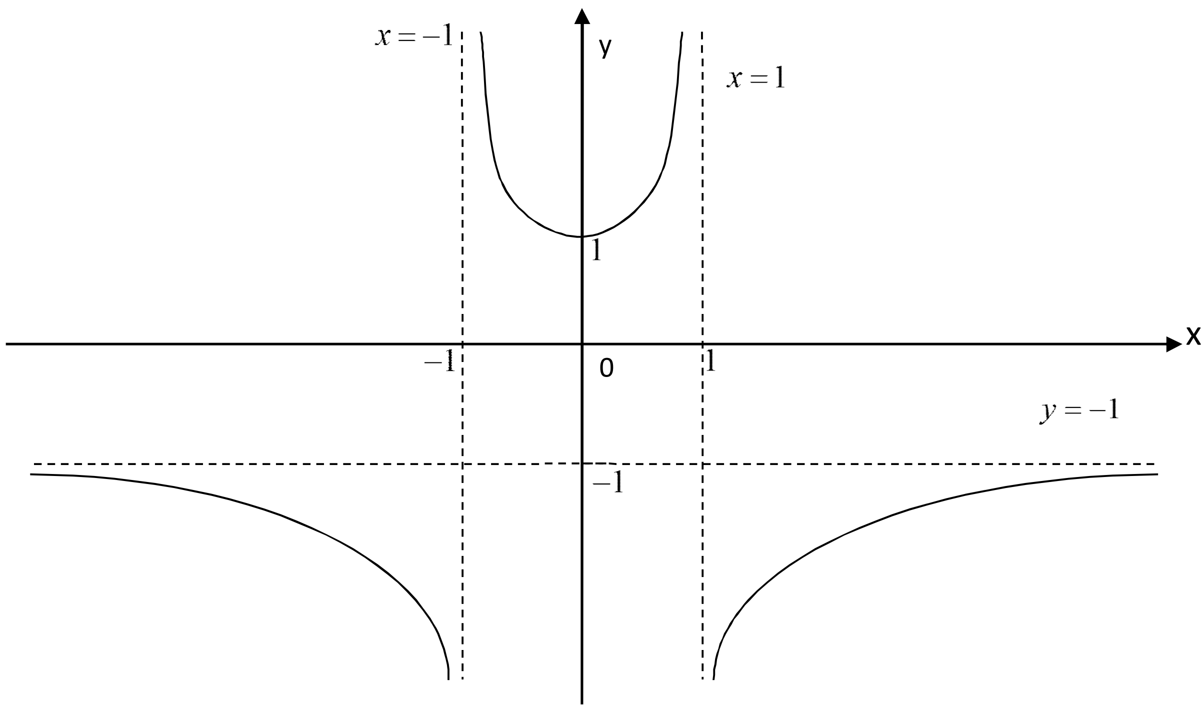

Рисунок 4

РОЗДІЛ 2 ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1 Числові ряди

Рядом називають суму нескінченної множини елементів

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots, \qquad (1)$$

які є членами нескінченної послідовності $\{U_n\}$.

Елементи $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n, \ldots$ називають членами ряду.

Скорочено ряд позначають так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots.$$

Сума *n* перших членів ряду

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n. \qquad (2)$$

називається *частковою сумою ряду*. Ряд називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Якщо границя послідовності часткових сум не існує або дорівнює нескінченності, то ряд називається *розбіжним.*

Необхідна ознака збіжності ряду: якщо ряд $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots$ збігається, то його загальний член U_n наближається до нуля, при нескінченному зростанні *n*, тобто

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0. \qquad (3)$$

Ця ознака не є достатньою.

Приклад. Знайти суму ряду та дослідити його на збіжність.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}\ ; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}\ .$$

Розв'язання. 1) Розкладемо даний раціональний дріб на суму найпростіших раціональних дробів, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Потім послідовно розглянемо часткові суми даного ряду.

Розкладемо квадратний тричлен на лінійні множники:

$$4n^2 + 8n + 3 = 4n^2 + 8n + 4 - 4 + 3 = (2n + 2)^2 - 1 = (2n + 1)(2n + 3).$$

Тепер загальний член ряду представимо у вигляді:

$$U_n = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Розкладемо отриманий раціональний дріб на суму найпростіших раціональних дробів:

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} + \frac{B}{2n+3};$$

$$2 = A(2n+3) + B(2n+1);$$

$$\text{при } n = -\frac{1}{2}, \text{ маємо: } 2 = 2A, \qquad A = 1;$$

$$\text{при } n = -\frac{3}{2}, \text{ маємо: } 2 = -2B, \qquad B = -1.$$

Тому маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right).$$

Розглянемо часткові суми даного ряду.

$$S_1 = \frac{1}{2\cdot 1 + 1} - \frac{1}{2\cdot 1 + 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5};$$

$$S_2 = \frac{1}{2\cdot 1 + 1} - \frac{1}{2\cdot 1 + 3} + \frac{1}{2\cdot 2 + 1} - \frac{1}{2\cdot 2 + 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7};$$

$$S_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2\cdot 3 + 1} - \frac{1}{2\cdot 3 + 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9};$$

...

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}.$$

Для знаходження суми S даного ряду, перейдемо до границі:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Отже, можемо зробити висновок, що ряд збігається.

2) Формула суми нескінченно спадаючої геометричної прогресії:

$$S = \frac{b_1}{1-q},$$

де b_1 - перший член нескінченно спадаючої геометричної прогресії, а q - її знаменник.

Представимо ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right).$$

Знаменник $q = {}^1/_2$, а перший член b_1=1. Сума дорівнює:

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - {}^1/_2}\right) = \frac{2}{3}.$$

Отже, можемо зробити висновок, що ряд збігається.

2.1.1 Ряди з додатними членами

Для числових рядів з додатними членами ($U_n > 0$), при дослідженні на збіжність, використовують наступні достатні ознаки збіжності:

Ознака порівняння. Якщо ряд з додатними членами

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots \tag{4}$$

порівняти з іншим рядом з додатними членами

$$V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n + \cdots \tag{5}$$

збіжність або розбіжність котрого відома, і якщо починаючи з деякого номера *n* виконується умова:

1) $U_n \leq V_n$ і ряд (5) збігається, то і ряд (4) також збігається;
2) $U_n \geq V_n$ і ряд (5) розбігається, то і ряд (4) також розбігається.

При використанні цієї ознаки, в якості еталонного ряду часто використовують нескінченну геометричну прогресію

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q > 0,$$

яка при $q < 1$ збігається, а при $q \geq 1$ розбігається, або узагальнений гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ .$$

який при $p > 1$ збігається і розбігається при $p \leq 1$.

Ознака Д'Аламбера. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = C,$$

то при $C < 1$ ряд збігається, а при $C > 1$ розбігається, а при $C = 1$ питання про збіжність залишається без відповіді.

Радикальна ознака Коші. Якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = C,$$

то при $C < 1$ ряд збігається, при $C > 1$ розбігається, а при $C = 1$ питання про збіжність залишається без відповіді.

Інтегральна ознака Коші. Ряд з додатними членами $U_n = f(n)$ збігається або розбігається, якщо збігається або розбігається відповідний невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx, \text{ де } f(x) - \text{ неперервно спадаюча функція.}$$

Приклад. Дослідити збіжність ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+4}; \ \ 2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}; 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n; 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nln^2n}.$$

Розв'язання.

1) Порівняємо цей ряд з узагальненим гармонійним рядом. В якості еталонного ряду обираємо $V_n = \frac{1}{n^2}$, так як $p = 2$, то цей ряд є збіжним. Виконаємо порівняння U_n з V_n:

$$\frac{1}{n^2+7n+4} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Отже, згідно ознаки порівняння, даний ряд є збіжним.

2)Знаючи *n*-ий член ряду, знаходимо наступний (*n*+1)-й член:

$$U_n = \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}; \qquad U_{n+1} = \frac{7^{3(n+1)}}{(2(n+1)-5)!} = \frac{7^{3n}\cdot 7^3}{(2n-3)!} =$$

$$= \frac{7^{3n}\cdot 7^3}{(2n-5)!\cdot(2n-4)\cdot(2n-3)}.$$

Знайдемо границю відношення U_{n+1} до U_n при необмеженому зростанні n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^{3n}\cdot 7^3\cdot(2n-5)!}{(2n-5)!\cdot(2n-4)\cdot(2n-3)\cdot 7^{3n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7^3}{(2n-4)\cdot(2n-3)} = 0.$$

$C = 0 < 1$, тому робимо висновок, що даний ряд збігається.

3) За радикальною ознакою Коші необхідно знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{4n^2+5} = \frac{3}{4}.$$

$$C = \frac{3}{4} < 1 - \text{ ряд збігається.}$$

4) Замінимо у заданому виразі загального члену ряду $U_n = f(n)$ номер n неперервною змінною x і переконаємося, що функція $f(x)$ є неперервною і спадаючою на нескінченному інтервалі зміни x. Потім знаходимо невласний інтеграл від функції $f(x)$ з нескінченною верхньою границею.

$$f(x) = \frac{1}{x ln^2 x}; \qquad \int_2^{\infty}\frac{dx}{x ln^2 x} = \lim_{N\to\infty}\int_2^{N}\frac{dx}{x ln^2 x} = \begin{bmatrix} t = lnx \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ t_{н} = ln\,2\,;\ t_{в} = \infty \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{ln\,2}^{N}\frac{dt}{t^2} = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{ln\,2}^{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{t}\Big|_{N}^{ln\,2} = \frac{1}{ln2} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{ln2}.$$

Інтеграл збігається, тому збігається і ряд.

2.1.2 Абсолютна та умовна збіжність знакозмінного ряду. Ознака збіжності знакозмінного ряду

Знакозмінний ряд (з членами різних знаків)

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots$$

називається *абсолютно* збіжним, якщо збігається ряд, складений з абсолютних значень його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = |U_1| + |U_2| + |U_3| + \cdots$$

Ряд, знаки членів котрого строго чергуються

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots + (-1)^{n+1} U_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n, \ \ (U_n > 0)$$

збігається, якщо його члени зменшуються за абсолютним значенням, тобто $U_1 > U_2 > U_3 > \cdots$ і загальний член ряду на нескінченност прямує до нуля:

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0.$ (ознака Лейбніца).

Приклад. Дослідити збіжність знакозмінного ряду.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Розв'язання.

1) $U_n = \frac{1}{2n-1}$. Досліджуємо загальний член ряду за ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0,$$

отже даний ряд збігається. Для того щоб установити збігається ряд абсолютно чи умовно, дослідимо ряд, складений з абсолютних значень членів даного ряду . Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} ln(2x-1) \Big|_1^N = \frac{1}{2} (\lim_{N\to\infty} ln(2N-1) - 1)$$
$$= \infty,$$

невласний інтеграл розбігається, тому можемо зробити висновок, що ряд збігається умовно.

2) $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Дослідимо загальний член ряду за ознакою Лейбніца:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$, ряд збігається. Застосуємо інтегральну ознаку Коші для з'ясування абсолютної збіжності:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{dx}{x^2+x} =$$
$$= \left[x^2 + x = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \lim_{N\to\infty} ln \left| \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| \Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty} ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Bigg|_1^N =$$
$$= ln\left(\lim_{N\to\infty} \frac{N}{N+1} \right) - ln \frac{1}{2} = ln\, 1 + ln\, 2 = ln\, 2.$$

Інтеграл збігається, а отже ряд збігається абсолютно.

2.2 Функціональні ряди

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \cdots$, члени якого є функціями від змінної x, називається *функціональним.* При різних значеннях x функціональний ряд перетворюється в числовий, який може бути збіжним або розбіжним.

Сукупність значень x, при яких функціональний ряд збігається, називається областю збіжності.

З усіх функціональних рядів найпростішими і найпоширенішими є степеневі ряди виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

або більш загального виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

Для визначення області збіжності функціонального ряду, як правило, спочатку використовують ознаку Д'Аламбера, а потім ті значення $x,$ для яких ця ознака не відповідає на питання збіжності ряду ($C = 1$), досліджуються окремо.

Приклад. Визначити інтервали збіжності степеневих рядів:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}};\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{3n}}{n^2}.$$

Розв'язання.

1) За відомим загальним членом ряду U_n, знайдемо U_{n+1}:

$$U_n = \frac{x^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}};\ \ U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^n\sqrt{n+2}}.$$

Далі, за ознакою Д'Аламбера, знаходимо границю

$$C = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}2^{n-1}\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n+2}\ x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| =$$

$$= \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{|x|}{2}.$$

З'ясуємо, при яких значеннях x ця границя буде менше одиниці, тобто

$$\frac{|x|}{2} < 1;\quad -1 < \frac{x}{2} < 1;\quad -2 < x < 2.$$

Згідно ознаки Д'Аламбера, при будь-якому значенні x із знайденого інтервалу даний ряд збігається абсолютно, а при $|x| > 2$ розбігається. Граничні точки $x = \pm 2$ досліджуємо окремо.

При $x = -2$ отримуємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n 2^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}},$$

який розбігається, що випливає із ознаки порівняння його з узагальненим гармонійним рядом.

При $x = 2$ отримуємо знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{\sqrt{n+1}},$$

котрий збігається за ознакою Лейбніца: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}}=0$ і не збігається абсолютно за ознакою порівняння (див. вище), а отже збігається умовно.

Отже, інтервал збіжності даного степеневого ряду є напіввідкритий інтервал: $-2<x\le 2$.

2) $U_n=\dfrac{(x+5)^{3n}}{n^2}$; $U_{n+1}=\dfrac{(x+5)^{3n+3}}{(n+1)^2}$;

$$C=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{3n+3}n^2}{(n+1)^2(x+5)^{3n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^3 n^2}{(n+1)^2}\right|=$$

$$=|x+5|^3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=|x+5|^3.$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$|x+5|^3<1;\ |x+5|<1;\ -1<x+5<1;\ -6<x<-4.$$

Граничні точки інтервалу досліджуємо окремо.

При $x=-6$ отримуємо знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n^2}=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається абсолютно за ознакою Лейбніца.

При $x=-4$ отримуємо числовий ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Згідно з ознакою порівняння ряд збігається.

Інтервал збіжності ряду: $-6\le x\le -4$.

2.3 Ряди Тейлора та Маклорена

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки a називається степеневий ряд відносно двочлена $x-a$ виду

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \quad \text{(T)}$$

При $a = 0$ ряд Тейлора є степеневий ряд відносно незалежної змінної x, який називається рядом Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (M)$$

Розкладання деяких елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (-\infty, \infty) \; ; \qquad (6)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (-\infty, \infty) \; ; \qquad (7)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty, \infty) \; ; \qquad (8)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1,1) \; ; \qquad (9)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1,1] \; ; \qquad (10a)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \quad [-1,1) \; ; \qquad (10b)$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (-1,1) \; ; \qquad (11)$$

$$arcsinx = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad [-1,1] \; ; \qquad (12)$$

Для того, щоб розкласти дану функцію в ряд Тейлора необхідно:

1) написати ряд Тейлора для даної функції, тобто обчислити значення цієї функції та її похідних при $x = a$ і підставити отримані значення в загальний вираз ряду Тейлора (Т);

2) дослідимо отриманий ряд на збіжність та знайти інтервал збіжності.

Приклад. Розкласти функції в ряд Тейлора:

$$1)\ f(x) = \frac{1}{2x-1}, \text{при } a = 2;\ \ 2) f(x) = \ln(3x-1), \text{при } a = 1.$$

Розв'язання.

1) Знайдемо похідні та обчислимо їх значення при $x = a$:

$$f(x) = \frac{1}{2x-1},\ \ f(2) = \frac{1}{3};$$

$$f'(x) = \frac{(-1)}{(2x-1)^2}\cdot 2,\ \ f'(2) = \frac{(-1)\cdot 2}{3^2};$$

$$f''(x) = -2\cdot\frac{(-1)}{(2x-1)^4}\cdot 2(2x-1)\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 2^2}{(2x-1)^3},$$

$$f''(2) = \frac{1\cdot 2\cdot 2^2}{3^3} = \frac{2!\cdot 2^2}{3^3};$$

$$f^{(3)}(x) = 1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\frac{(-1)}{(2x-1)^6}\cdot 3(2x-1)^2\cdot 2 = \frac{(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}{(2x-1)^4},$$

$$f^{(3)}(2) = \frac{(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3}{3^4} = \frac{(-1)\cdot 3!\cdot 2^3}{3^4};$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{(2x-1)^{n+1}}, \qquad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{3^{n+1}},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Підставляючи отримані значення в ряд Тейлора (T), отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1!\cdot 2}{1!\cdot 3^2}(x-2) + \frac{2!\cdot 2^2}{2!\cdot 3^3}(x-2)^2 - \frac{3!\cdot 2^3}{3!\cdot 3^4}(x-2)^3 + \cdots +$$

$$+\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n}{n!\cdot 3^{n+1}}(x-2)^n + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3}(x-2) + \frac{2^2}{3^2}(x-2)^2 - \frac{2^3}{3^3}(x-2)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{3^n}(x-2)^n + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (x-2)^n}{3^n}.$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n = \frac{2^n \cdot (x-2)^n}{3^n}; \;\; U_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (x-2)^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n \cdot (x-2)^n \cdot (x-2)}{3 \cdot 3^n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2 \cdot 2^n \cdot (x-2)^n \cdot (x-2) \cdot 3^n}{3 \cdot 3^n \cdot 2^n \cdot (x-2)^n}\right| = \frac{2}{3}|x-2|.$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$\frac{2}{3}|x-2| < 1; \; -1 < \frac{2}{3}(x-2) < 1; \;\; -\frac{3}{2} < x - 2 < \frac{3}{2}; \; \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Граничні точки цього інтервалу дослідимо окремо.

При $x = \frac{1}{2}$ отримаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (-1)^n \cdot 3^n}{3^n 2^n} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 1$ – ряд розбігається.

При $x = \frac{7}{2}$ отримаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ – ряд розбігається.

Інтервал збіжності ряду: $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$.

$$2) \;\; f(x) = \ln(4x-1), \quad f(1) = \ln 3;$$

$$f'(x) = \frac{1}{4x-1} \cdot 4, \quad f'(1) = \frac{1 \cdot 4}{3};$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(4x-1)^2} \cdot 4^2, \quad f''(1) = \frac{-1 \cdot 4^2}{3^2};$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot (4x-1)}{(4x-1)^4} \cdot 4^3 = \frac{2! \cdot 4^3}{(4x-1)^3}, \quad f^{(3)}(1) = \frac{2! \cdot 4^3}{3^3};$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{(4x-1)^n}, \quad f^n(1) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{3^n};$$

. . . .

Підставимо отримані значення в ряд Тейлора (Т)

$$f(x) = \ln 3 + \frac{4}{3}(x-1) - \frac{1! \cdot 4^2}{2! \cdot 3^2}(x-1)^2 + \frac{2! \cdot 4^3}{3! \cdot 3^3}(x-1)^3 + \cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{n! \cdot 3^n}(x-1)^n + \cdots =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{n! \cdot 3^n}(x-1)^n =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4^n}{n \cdot 3^n}(x-1)^n.$$

Дослідимо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n = \frac{4^n \cdot (x-1)^n}{n \cdot 3^n}; \quad U_{n+1} = \frac{4^{n+1} \cdot (x-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1} \cdot (x-1)^{n+1} \cdot n \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot (n+1) \cdot 4^n \cdot (x-1)^n}\right| =$$

$$= \frac{4}{3}|x-1| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{4}{3}|x-1|$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$\frac{4}{3}|x-1| < 1; \;\; -1 < \frac{4}{3}(x-1) < 1; \;\; \frac{1}{4} < x < \frac{7}{4}.$$

При $x = \frac{1}{4}$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \text{ряд збігається умовно}$$

за ознакою Лейбніця (див. вище).

При $x = \frac{7}{4}$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\text{ ряд розбігається (див. вище).}$$

Область збіжності ряду: $x\epsilon\left[\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$.

Приклад. Розкласти функції в ряд Маклорена, з'ясувати області збіжності отриманих рядів:

$$1)\ f(x)=e^{\,3x};\quad 2)\ f(x)=x\cdot sin2x.$$

Розв'язання.

1) Розкладання функції $e^{\,3x}$ в ряд Маклорена легко отримати, замінивши у формулі (1) x на $3x$:

$$e^{3x}=1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}+\cdots+\frac{(3x)^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^nx^n}{n!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n=\frac{3^nx^n}{n!},\quad U_{n+1}=\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{3x\ 3^nx^n}{n!\,(n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x\cdot\ 3^n\cdot x^n\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 3^n\cdot x^n}\right|=|3x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=|3x|\cdot 0=0,$$

даний ряд збігається при $x\epsilon(-\infty,\infty)$.

2) розкладемо $sin2x$ за формулою (2):

$$sin2x=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$x\cdot sin2x=x\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n = \frac{2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+1)!}, \quad U_{n+1} = \frac{2^{2n+3}x^{2n+4}}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+3}x^{2n+4}}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+3}x^{2n+4}\cdot(2n+1)!}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)\cdot 2^{2n+1}x^{2n+2}}\right| =$$

$$= 4x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

отже, даний ряд збігається при $x\epsilon(-\infty,\infty)$.

2.4 Застосування степеневих рядів

Степеневі ряди застосовують до наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, роз'язання диференційних рівнянь.

Приклад. Обчислити наближено зазначену величину з точністю до α, використавши розклад в степеневий ряд відповідно підібраної функції.

$$1)\sqrt[3]{500}, \alpha = 0{,}001; \;\; 2)\; ln7, \alpha = 0{,}0001.$$

Розв'язання. 1) Наближене обчислення зазначеної функції виконується за допомогою біноміального ряду.

Представимо дане число у вигляді, до якого можливо застосувати біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000\cdot\frac{1}{2}} = 10\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 10\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}} = 10\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В біноміальний ряд підставимо замість x величину $\left(-{}^{1}/_{2}\right), m = {}^{1}/_{3}$.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 +$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-4\right)}{5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$+\dots=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{36}-\frac{5}{648}-\frac{5}{1944}-\frac{11}{11644}-\dots=1-0{,}1666666-0{,}0277777-$$

$$-0{,}007716-0{,}002572-0{,}0009446-\dots\approx 0{,}79396.$$

$$\sqrt[3]{500}\approx 10\cdot 0{,}79396\approx 7{,}9396.$$

$$2)\ \ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots\qquad(-1{,}1];$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots-\frac{x^n}{n}-\dots\qquad[-1{,}1)$$

Аргумент функції не задовольняє умові $x\epsilon(-1{,}1)$, тому скористаємося наступною формулою:

$$\ln(1+x)-\ \ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right);\ \ x\neq 1.$$

$$\frac{1+x}{1-x}=7;\ \ 7(1-x)=1+x;\ \ 8x=6;\ \ x=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

$$\ln 7=\ln\frac{1+0{,}75}{1-0{,}75}=2\left(0{,}75+\frac{0{,}75^3}{3}+\frac{0{,}75^5}{5}+\frac{0{,}75^7}{7}+\dots\right)=$$

$$=2(0{,}75+0{,}140625+0{,}04746+0{,}019069+\dots)=1{,}914308.$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл з точністю $\alpha=0{,}0001$.

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx$$

Розв'язання. Даний інтеграл не можливо обчислити в елементарних функціях. Тому підінтегральну функцію необхідно розкласти в степеневий ряд і перевірити, чи належать границі інтегрування області збіжності цього ряду, якщо так, то наближенне обчислення інтегралу можливе.

Розкладемо функцію $y=sin(x^2)$ в степеневий ряд за формулою:

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots\ ,$$

замінивши в ній x на x^2. Отримаємо

$$sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\dots\ .$$

Знайдемо область збіжності отриманого степеневого ряду, застосовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$U_n = \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!};\ U_{n+1} = \frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{4n+6}(2n+1)!}{(2n+3)!\,x^{4n+2}}\right| = x^4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^4\cdot 0 = 0.$$

Область збіжності $(-\infty,\infty)$. Відрізок $[0,1]$ належить області збіжності. Таким чином,

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx = \int_0^1\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \cdots.$$

Отримали знакозмінний числовий ряд. Остаток ряду не перевищує першого із відкиданих членів. У даному випадку достатньо взяти перші два члена, а

$$R_3 < \frac{1}{1320} < 8\cdot 10^{-4}.$$

Тобто, вказана точність буде дотримуватись. Тому

$$\int_0^1 sin(x^2)\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0{,}3095.$$

РОЗДІЛ 3 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

3.1 Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла

Відомо, що однією з основних задач диференційного числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

За означенням, первісною функцією для функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a;b)$, називають функцію $F(x)$, яка визначена на тому самому проміжку і задовольняє умові

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Сукупність всіх первісних функції $f(x)$, де $x\epsilon(a;b)$, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

3.2 Властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$,
2. $d(\int f(x)dx) \quad = f(x)dx$,
3. $\int dF(x) = F(x) + C$,
4. $\int Cf(x) = C\int f(x)dx$, де C - $const \neq 0$,
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$,
6. $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$- диференційовна функція від незалежної змінної x.
7. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблиця основних інтегралів

1) $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,\ \alpha\epsilon R,\ \ \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C,\ \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C,$

2) $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C,$

3) $\int a^u = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1, \qquad \int e^u du = e^u + C,$

4) $\int sinu \cdot du = -cosu + C,$

5) $\int cosu \cdot du = sinu + C,$

6) $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C,$

7) $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C,$

8) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C, a\epsilon R, a \neq 0,$

9) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, a\epsilon R, a \neq 0,$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0,$

11) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C,$

Зауважимо, що тут $\alpha, A\ i\ a$ - сталі, u - незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

3.3 Безпосереднє інтегрування і метод розкладання

Під безпосереднім інтегруванням розуміють пряме використання таблиці інтегралів.

Метод розкладу грунтується на застосуванні властивостей 4 і 5 невизначеного інтегралу. Тут слід також мати на увазі, що даний інтеграл може бути зведений до одного або кількох табличних інтегралів після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією.

Приклад. Знайти: 1) $\int(8x^7-3x^2+3x+10)dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$;

$$3)\int\cos(4x-5)\,dx\,;4)\int\frac{dx}{5x^2-1}$$

Розв'язання.

1) Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати

$$\int(8x^7-3x^2+3x+10)dx=\int 8x^7dx-\int 3x^2dx+\int 3xdx+\int 10dx=$$

$$=8\int x^7dx-3\int x^2dx+3\int xdx+10\int dx=$$

$$=x^8-x^3+\frac{3x^2}{2}+10x+C.$$

Відзначимо, що додавати довільну сталу після знаходження кожного інтеграла не слід. Досить всі довільні сталі підсумувати і результат, позначений однією буквою C, записати вкінці, тобто після того, як усі інтеграли будуть знайдені.

2) $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}=\int\frac{dx}{(2-5x)^{\frac{1}{5}}}=\int(2-5x)^{-\frac{1}{5}}dx=\frac{(2-5x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}\cdot(-5)}+C=$

$$=-\frac{\sqrt[5]{(2-5x)^4}}{4}+C.$$

У цьому прикладі ми скористались властивістю (7)

3) $\int\cos(4x-5)\,dx=\frac{1}{4}sin(4x-5)+C.$

$$4)\int\frac{dx}{5x^2-1}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2-\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{5}}}ln\left|\frac{x-\frac{1}{\sqrt{5}}}{x+\frac{1}{\sqrt{5}}}\right|+C=\frac{\sqrt{5}}{10}ln\left|\frac{\sqrt{5}x-1}{\sqrt{5}x+1}\right|+C.$$

3.4 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Приклад. Знайти 1) $\int\frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx$; 2) $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$; 3) $\int 7sin^3xcosxdx$.

Розв'язання. 1) Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int\frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{arctg2x}\cdot\frac{2}{1+4x^2}dx=\left|\begin{matrix}u=arctg2x\\ du=\frac{2}{1+4x^2}dx\\ \frac{du}{2}=\frac{1}{1+4x^2}dx\end{matrix}\right|=$$

$$=\int e^u\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}e^{arctg2x}+C.$$

Заміну змінної розміщуємо після інтеграла у вертикальних дужках.

$$2)\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}}=\frac{1}{6}\int\frac{6x^5dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}}=\left|\begin{matrix}t=x^6\\ dt=6x^5dx\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+7}}=$$

$$=\frac{1}{6}ln\left|t+\sqrt{t^2+7}\right|+C.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо:

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}}=\frac{1}{6}ln\left|x^6+\sqrt{x^{12}+7}\right|+C.$$

$$3)\int 4sin^3xcosxdx=4\int(sinx)^3cosxdx=\left|\begin{matrix}u=sinx\\ du=cosxdx\end{matrix}\right|=$$

$$=4\int u^3du=4\cdot\frac{u^4}{4}+C=(sinx)^4+C;$$

Останній вираз отримали після тригонометричних перетворень.

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \begin{vmatrix} x+1=t^2 \\ x=t^2-1 \\ dx=2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t}{t+1}dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2t - 2ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C.$$

3.5 Метод інтегрування частинами

Як вже відзначалося раніше, цей метод, як і метод підстановки, який був щойно розібраний, належить до числа основних методів інтегрування.

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовні функції від x, то має місце формула

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du,$$

яка називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що грунтується на застосуванні цієї формули, методом інтегрування частинами.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли типу:

1. $\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \qquad \big(u=P_n(x)\big);$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

2. $\int P_n(x)a^x dx, \qquad \big(u=P_n(x)\big);$

3. $\int \log_a(ax+b)\,dx, \qquad (u=\log_a(ax+b));$

4. $\int P_n(x)\log_a(ax+b)dx; \quad (u=\log_a(ax+b));$

5. $\int \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \quad \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$

6. $\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$

і багато-багато інших…

Зразки розв'язання прикладів

Приклад. Знайти 1) $\int x^2 sin3xdx$; 2) $\int x^3 lnxdx$; 3) $\int x \cdot arctgxdx$.

Розв'язання. 1) Інтегруємо частинами :

$$\int x^2 sin3xdx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = sin3xdx, & v = \int sin3xdx = -\frac{1}{3}cos3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x - \int \left(-\frac{1}{3}cos3x\right) 2xdx = -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3xdx.$$

Проміжні обчислення розташовуємо між вертикальних дужок. До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3xdx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos3xdx, & v = \int cos3xdx = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3xdx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x.$$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2 sin3xdx = -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C.$$

2)Тут $u = lnx$, $dv = x^3dx$, одержимо

$$\int x^3lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3dx, & v = \int x^3dx = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4}lnx - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.$$

3) $$\int x \cdot arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2}{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}(x^2 \cdot acrtgx - x + arctgx) + C.$$

3.6 Інтегрування раціональних функцій

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція виду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - алгербаїчні многочлени ступеня n та m з дійсними коефіцієнтами, які не мають спільних коренів, причому $Q_m(x) \neq 0$.

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто якщо $n < m$ і неправильним раціональним дробом в протилежному випадку, тобто якщо $n \geq m$.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n \geq m)$ можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де $T(x)$ - ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k < m)$ - правильний раціональний дріб.

3.6.1 Інтегрування раціональних функцій, що містять квадратний тричлен

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{4x^2+4x+10}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена $4x^2 + 4x + 10$, одержимо табличний інтеграл (17). Дійсно

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 10} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 9} = \left| \begin{matrix} u = 2x + 1 \\ du = 2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{(2x+1)^2 + 9} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{u}{3} + C = \frac{1}{6} arctg \frac{2x+1}{3} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{3x-4}{4x^2-3x+1} dx$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо також інтеграл від елементарного дробу, але порівнявши ступінь чисельника і знаменника маємо: $U = 4x^2 - 3x + 1; dU = (8x - 3)dx$.

Доповнимо чисельник до виду отриманого dU

$$3x-4=\frac{3}{8}\left(8x-3+3-\frac{32}{3}\right)=\frac{3}{8}(8x-3)-\frac{23}{24}.$$

Тоді

$$\int\frac{3x-4}{4x^2-3x+1}dx=\int\frac{\frac{3}{8}(8x-3)-\frac{23}{24}}{4x^2-3x+1}dx=\frac{3}{8}\int\frac{8x-3}{4x^2-3x+1}dx-$$

$$-\frac{23}{24}\int\frac{dx}{4x^2-3x+1}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-$$

$$-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{7}{64}}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\cdot\frac{1}{2\frac{\sqrt{7}}{8}}ln\left|\frac{x-\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{7}}{8}}{x-\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{7}}{8}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{24\sqrt{7}}ln\left|\frac{8x-3-\sqrt{7}}{8x-3+\sqrt{7}}\right|+C.$$

3.6.2 Інтегрування раціональних функцій

І тип. ***Корені знаменника дійсні і різні.***

Приклад. Знайти $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{l|l} -\dfrac{x^5 + x^4 - 8}{\underline{x^5 - 4x^3}} & \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + x + 4} \text{ (ціла частина)} \end{array}$$

$$-\dfrac{x^4 + 4x^3 - 8}{\underline{4x^3 - 16x}}$$

$$-\dfrac{4x^3 - 4x^2 - 8}{\underline{4x^3 - 16x}}$$

$$4x^2 + 16x - 8 \quad \text{(остача).}$$

Далі подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$ має три прості корені: $x = 0, x = 2$ і $x = -2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів першого типу, тобто

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$x^2 + 4x - 2 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2)$$

або

$$x^2 + 4x - 2 = (A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A + B + C = 1, \\ x & 2B - 2C = 4, \\ x^0 & -4A = -2. \end{array}$$

Розв'язавши цю систему, находимо $A = \frac{1}{2}, B = \frac{5}{4}, C = -\frac{3}{4}$.

Слід визначити, що тут коефіцієнти A, B і C простіше було б знайти способом підстановки в тотожність частинних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто

$$x^2 + 4x - 2 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2)$$

$$\begin{array}{c|c} x = 0 & -2 = -4A, \\ x = 2 & 10 = 8B, \\ x = -2 & -6 = 8C, \end{array}$$

звідки $A = \frac{1}{2}, B = \frac{5}{4}, C = -\frac{3}{4}$.

Таким чином,

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x - 2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x + 2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x - 2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x + 2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x - 2} - 3 \int \frac{dx}{x + 2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2ln|x| + 5ln|x-2| - 3ln|x+2| + C.$$

II тип. ***Корені знаменника дійсні, але серед них є кратні.***

Приклад. Знайти $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)} dx$.

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи,що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x) = x(x-1)(x^2-4x+3) = x(x-1)(x-1)(x-3) =$$

$$= x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x = 0$ і $x = 3$ є простими, а $x = 1$ – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2 - 2x + 3 = A(x-3)(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-3) + Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & \quad 3 = -3A, \\ x=3 & \quad 6 = 12B, \\ x=1 & \quad 2 = -2C, \\ x^3 & 0 = A + B + D. \end{array}$$

Звідси: $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = -1, D = \frac{1}{2}$,

отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}ln|x-1| + C\ .$$

Ш тип. ***Серед коренів знаменника є комплексні.***

Приклад. Знайти $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що $x^2-2x+10=0$, $D=4-40=-36<0$, маємо

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} = \frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C:

$$4x-10 = A(x^2-2x+10)+(Bx+C)(x+2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{c|c} x=-2 & -18=18A, \\ x^2 & 0=A+B, \\ x^0 & -10=10A+2C, \end{array}$$

звідки: $A=-1, B=1, C=0$, отже,

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} = -\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x^2-2x+10}\ .$$

Маємо,

$$\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx = \int \left(-\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x^2-2x+10}\right)dx =$$

$$= -\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-2x+10}dx = -ln|x| + \frac{1}{2}\int\frac{2x-2+2}{x^2-2x+10}dx =$$

$$= -ln|x| + \frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx + \int\frac{dx}{x^2-2x+10} =$$

$$= -ln|x| + \frac{1}{2}ln|x^2-2x+10| + \int\frac{dx}{(x-1)^2+9} =$$

$$= -ln|x| + \frac{1}{2}ln|x^2-2x+10| + \frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3} + C.$$

3.7 Інтегрування тригонометричних функцій

І. Інтеграли виду $\int sin^m x \cdot cos^n x dx$.

1) Якщо m і n - цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад $m = 2k+1$, то

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k+1} x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k} x \cdot sinx \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int (sin^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx = \int (1-cos^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix}\right| = -\int (1-t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n = 2p+1 > 0$, то треба застосувати підстановку $t = sinx$.

2) Якщо обидва показники m і n - парні невід'ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1-cos2x),$$
$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1+cos2x).$$

3) Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них від'ємний, то потрібно виконати заміну $tgx = t$ або $ctgx = t$. Тоді: $x = arctgt$ ($x = arcctgt$), $dx = \frac{dt}{t^2+1}$ $\left(dx = -\frac{dt}{t^2+1}\right)$.

II. Інтеграли виду $\int sinax \cdot cosbxdx$, $\int cosax \cdot cosbxdx$, $\int sinax \cdot sinbxdx$.

Щоб знайти ці інтеграли, треба перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\,x + \sin(a-b)\,x),$$
$$cosax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)\,x + \cos(a-b)\,x),$$
$$sinax \cdot sinbx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)\,x - \cos(a+b)\,x).$$

III. Інтеграли виду $\int R(sinx, cosx)dx$, де $R -$ раціональна функція від $sinx$ і $cosx$. За допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ $(-\pi < x < \pi)$ інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції. При цьому

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ вигідніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2} = t$.

Слід також визначити, що в силу своєї універсальності підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ часто приводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл. Наприклад:

1) Якщо виконується рівність $R(-sinx, cosx) \equiv -R(sinx, cosx)$, то застосуємо підстановку $cosx = t$.

2) Якщо виконується рівність $R(sinx, -cosx) \equiv -R(sinx, cosx)$, то застосуємо підстановку $sinx = t$.

3) Якщо виконується рівність $R(-sinx, -cosx) \equiv R(sinx, cosx)$, то застосовуємо підстановку $tgx = t$ (або $ctgx = t$), при цьому, якщо $tgx = t$, то

$$sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад. Знайти $\int cos^4x \cdot sin^5xdx$.

Розв'язання. Тут $m = 5, n = 4$. Враховуючи, що m непарне, одержимо

$$\int cos^4x \cdot sin^5xdx = \int cos^4x \cdot sin^4x \cdot sinxdx = \int cos^4x \cdot (sin^2x)^2 \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4x \cdot (1-cos^2x)^2 \cdot sinxdx = \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix} \right| = -\int t^4(1-t^2)^2\,dt =$$

$$= -\int t^4(1-2t^2+t^4)dt = \int (2t^6 - t^4 - t^8)dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{2cos^7x}{7} - \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^9x}{9} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$.

Розв'язання. Тут $m = 2, n = -4 < 0$ і парне, тому

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx, x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ sin^2x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, cos^2x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{cos^3 x}{\sqrt[3]{sin^4 x}} dx$.

Розв'язання. Тут $m = -\frac{4}{3}, n = 3 > 0$ і непарне, тому

$$\int \frac{cos^3 x}{\sqrt[3]{sin^4 x}} dx = \int \frac{cos^2 x}{\sqrt[3]{sin^4 x}} \cdot cosxdx = \int \frac{1 - sin^2 x}{\sqrt[3]{sin^2 x}} \cdot cosxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^{2/3}} \cdot dt = \int t^{-2/3}\, dt - \int t^{4/3}\, dt = 3t^{1/3} - \frac{3t^{7/3}}{7} + C =$$

$$= 3t^{1/3}\left(1 - \frac{t^2}{7}\right) + C = 3sin^{1/3}x\left(1 - \frac{sin^2 x}{7}\right) + C.$$

Приклад. Знайти $\int sin^4 x \cdot cos^2 xdx$.

Розв'язання. В нашому прикладі $m = 4, n = 2$ обидва додатні і парні, тобто маємо

$$\int sin^4 x \cdot cos^2 xdx = \int sin^2 x \cdot sin^2 x \cdot cos^2 xdx = \int sin^2 x \cdot (sinx \cdot cosx)^2 dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - cos2x) \cdot \frac{1}{4} sin^2 2xdx = \frac{1}{8}\int sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int cos2x \cdot sin^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - cos4x)\, dx - \frac{1}{16}\int sin^2 2x \cdot d(sin2x) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{1}{16} \cdot \frac{sin^3 2x}{3} + C = \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{sin^3 2x}{48} + C.$$

РОЗДІЛ 4 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

4.1 Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла

Границя інтегральної суми, тобто

$$\lim_{\substack{max\Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)\Delta x_k$$

якщо вона існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на часткові, ні від вибору на них точок θ_k, називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Число a називають нижньою межею інтегрування, число $b -$ верхньою межею інтегрування.

4.2 Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ - будь-яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

4.3 Властивості визначеного інтеграла

1. За означенням

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. За означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Якщо $f(x) -$ інтегровна функція на відрізку $[a, b]$ і $c -$ стала, то на цьому відрізку інтегровна і функція $c \cdot f(x)$, причому

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

тобто сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

4. Якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ - інтегровні функції на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку інтегровні і функції $f_1(x) \pm f_2(x)$, причому

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)\,)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

5. Якщо $f(x) -$ інтегровна функція на відрізку $[a, b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x\epsilon[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$ і $a < c < b$, то ця функція інтегровна і на відрізках $[a, c]$ і [c, b], причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що має місце й обернене твердження. Цю властивість називають адитивною властивістю визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити 1) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(10+2x)^4}$; 2) $\int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; 3) .

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(10+2x)^4}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(10+2x)^{-4}\cdot 2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(10+2x)^{-3}}{-3}\bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(10+2x)^3}\bigg|_{-1}^{1}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{(10+2)^3}-\frac{1}{(10-2)^3}\right)=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{1728}-\frac{1}{512}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{8-27}{13824}=\frac{19}{82944}.$$

$$2)\int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}=\int_{2}^{5}\frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=arcsin\frac{x-2}{3}\bigg|_{2}^{5}=$$

$$=arcsin\frac{5-3}{3}-arcsin\frac{2-2}{3}=arcsin1-arcsin0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

4.4 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $x=\varphi(t)-$ функція неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha,\beta]$, причому $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)\le\varphi(\beta)=b$ для $\alpha\le t\le\beta$, то

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Цю формулу називають формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити 1) $\int_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}}$; 2) $\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

Розв'язання. 1) Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}} = \left| \begin{array}{ll} & t = 1 + lnx, dt = \dfrac{dx}{x} \\ e^3: & t_в = 1 + lne^3 = 1 + 3 = 4 \\ 1: & t_н = 1 + ln1 = 1 + 0 = 1 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 =$$

$$= 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 2(2-1) = 2.$$

2) Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \left| \begin{array}{c} x^2 - 1 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ xdx = tdt \\ 1 - 1 = t^2, t_н = 0 \\ 4 - 1 = t^2, t_в = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} \cdot xdx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2+1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = (t - arctgt)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3} - arctg\sqrt{3} + arctg0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

4.5 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежемося розв’язанням кількох прикладів.

Приклад. Обчислити: 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cosxdx$; 2) $\int_1^2 \frac{lnxdx}{x^5}$.

Розв'язання.

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cosxdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{vmatrix} = (x \cdot sinx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot sin\frac{\pi}{2} - 0 + cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2} - cos0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$2) \int_1^2 \frac{lnxdx}{x^5} = \begin{vmatrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^5}, & v = -\dfrac{1}{4x^4} \end{vmatrix} = \left(-\frac{lnx}{4x^4}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right) \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{ln2}{64} + \frac{1}{4} \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Big|_1^2 = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{256} + \frac{1}{16} = \frac{15 - 2ln2}{256}.$$

4.6 Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії

4.6.1 Обчислення площі плоскої фігури

Якщо необхідно обчислити площу області, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$ і $x = b$, при умові $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис. 6).

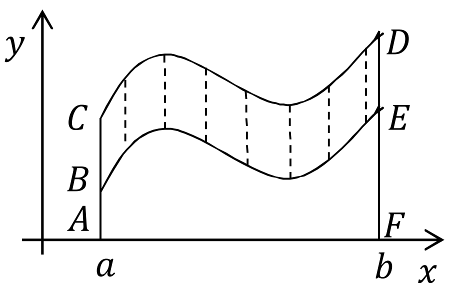

Рисунок 6

Знайдемо площу, як різницю площин двох криволінійних трапецій:

$$S = S_{ACDF} - S_{ABEF};$$

$$S_{ACDF} = \int_a^b f_2(x)dx,$$

$$S_{ABEF} = \int_a^b f_1(x)dx; \quad S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx,$$

$$S=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx.$$

Приклад. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої кривими

$$y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}.$$

Розв'язання. 1. Нанесемо на координатну площину лінії $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$ (рис. 7).

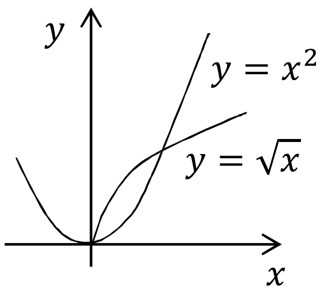

Рисунок 7

2. Знайдемо межі інтегрування, для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}y=x^2\\ y=\sqrt{x}\end{cases};\quad x^2=\sqrt{x};\quad x^4=x;$$

$$x^4-x=0;\ \ x(x^3-1)=0;$$

$$x_1=0,\qquad x_2=1.$$

1. Знайдемо площу фігури:

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\text{од. кв.}$$

Приклад. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої віссю Ox та лініями $y=(x+2)^2$ та $y=4-x$.

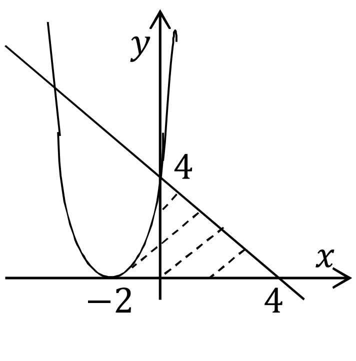

Рисунок 8

Розв'язання. 1. Область, обмежена віссю Ox та лініями $y=(x+2)^2$ та $y=4-x$ складна $D=D_1+D_2$ (рис. 8) тому площу знаходимо, як суму площин $S=S_1+S_2$.

2. Знайдемо межі інтегрування, для цього обчислимо точки перетину параболи і прямої з віссю Ox та точку перетину параболи і прямої:

$$\begin{cases}y=0\\ y=(x+2)^2\end{cases},\qquad x=-2.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 4 - x' \end{cases} \quad x = 4; \begin{cases} y = (x+2)^2 \\ y = 4 - x \end{cases}, \ (x+2)^2 = 4 - x,$$

$$x^2 + 5x = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = -5; \ x_1 \epsilon [-2; 4] .$$

3. Знайдемо площу фігури:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} (x+2)^2 \, dx + \int_{0}^{4} (4-x) dx =$$

$$= \frac{(x+2)^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{(4-x)^2}{2}\Bigg|_{0}^{4} = \frac{8}{3} - 0 - 0 + 8 = \frac{32}{3} \text{ од. кв.}$$

2. Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані параметрично.

Нехай рівняння $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ визначає деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, тому $\alpha \le t \le \beta$.

Отже,

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx,$$

виконаємо заміну $y = y(t)$, $dx = x'(t)dt$, остаточно маємо

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt \right|$$

Приклад. Обчислити площу області, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}.$$

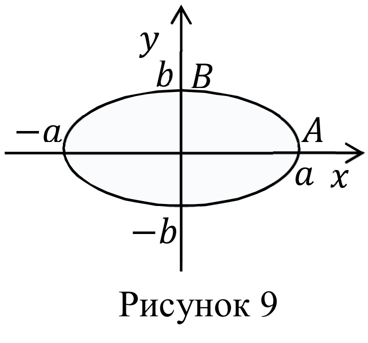

Рисунок 9

Розв'язання. 1. Обчислимо площу частини еліпса, що знаходиться у першому квадранті. Знайдемо межі інтегрування з урахуванням додатного напряму руху (проти годинникової стрілки) (рис. 9).

При $A(a, 0)$: $x = acost, \ acost = a,$

$$cost = 1, \qquad t = 0.$$

При $B(0,b)$: $x = acost, \quad acost = 0, \; cost = 0, \; t = \frac{\pi}{2}$.

2. Обчислимо площу S_1. З урахуванням, що $dx = -a\,sint\,dt$, маємо:

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\,sint(-a\,sint)dt = -ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2t\,dt =$$

$$= -\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos2t)\,dt = -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sin\pi - 0 + \frac{1}{2}sin0\right) = -\frac{ab\pi}{4};$$

$$S = 4|S_1| = ab\pi \text{ од. кв.}$$

3. Випадок полярної системи координат

Площа криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією $\rho = \rho(\varphi)$ і двома радіус – векторами $\varphi = \alpha \; i \; \varphi = \beta$ визначається за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі $\rho = 2\sqrt{2\cos2\varphi}$.

Розв'язання. Якщо полярний кут змінюється від 0 до $\pi/4$, то радіус – вектор описує область, площа якої дорівнює чверті шуканої площі. Отже,

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 8\cos2\varphi\,d\varphi = 16\cdot\frac{1}{2}\sin2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 8\;(од^2).$$

4.6.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1. Випадок прямокутних координат

Нехай в прямокутних координатах дана плоска крива AB, рівняння якої $y = f(x)$, де $a \le x \le b$ (рис.10)

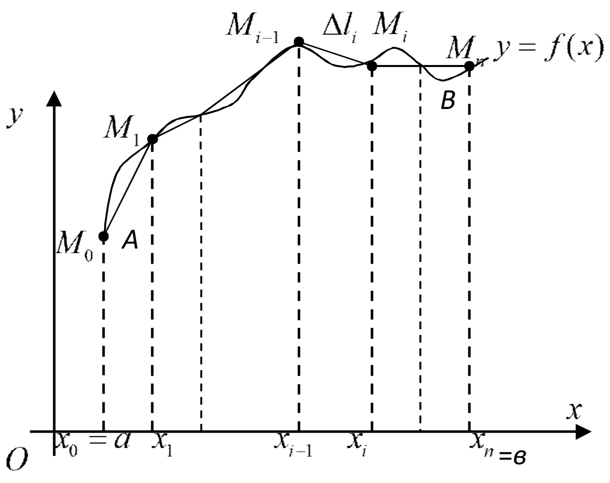

Рисунок 10

Під довжиною дуги кривої AB розуміють границю, до якої прямує довжина ламаної, що вписана в цю дугу, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля.

Нехай функція $y = f(x)$ та її похідна неперервні на відрізку $[a; b]$Тоді довжина дуги кривої $y = f(x)$дорівнює

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

або у скороченому вигляді $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$.

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln\left(\frac{5x}{2}\right)$, якщо $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

Розв'язання. Довжина дуги:

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{5x} \cdot \frac{5}{2}\right)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\, dx = \left| \begin{array}{c} x = tgt \\ dx = \dfrac{dt}{cos^2 t} \\ t_в = arctg\sqrt{8} \\ t_н = \dfrac{\pi}{3} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{cost}{cost \cdot sint} \cdot \frac{dt}{cos^2 t} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{sintdt}{sin^2tcos^2t} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{d(cost)dt}{(cos^2t-1)cos^2t} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \left(\frac{1}{cos^2t-1} - \frac{1}{cos^2t}\right) d(cost)dt = \left(\frac{1}{2}ln\left|\frac{cost-1}{cost+1}\right| + \frac{1}{cost}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} =$$

Звернемо увагу на те, що $cost = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}}$, тобто $cos(arctg\sqrt{8}) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(arctg\sqrt{8})}} = \frac{1}{3}$, одержимо:

$$l = \frac{1}{2}ln\left|\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}\right| + 3 - \frac{1}{2}ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right| - 2 = \frac{1}{2}ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{2}ln\frac{3}{2} + 1 \text{ (од.)}.$$

2. Випадок параметричного задання кривої

Розглянемо дугу L_{AB} гладкої плоскої лінії, що задана параметрично $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t \epsilon [\alpha;\ \beta]$, де функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ – неперервні разом зі своїми похідними, причому функція $x = x(t)$ – монотонно зростаюча, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$.

Довжина дуги плоскої кривої, що задана параметрично, визначається за формулою

$$l = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt.$$

Приклад. Обчислити длину дуги лінії $x = 3cost,\ y = 3sint,\ t\epsilon[0; 2\pi]$.

Розв'язання. $x' = -3sint, y' = 3cost$, отже:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9sin^2t + 9cos^2t}\,dt = 3\int_0^{2\pi} dt = 3t|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

3. Випадок полярної системи координат

Нехай дуга L_{AB} задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \leq$

$\varphi \leq \beta$, де функція $\rho(\varphi)$ неперервна разом зі своєю похідною $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha;\ \beta]$, причому точкам A $і$ B відповідають значення α $і$ β. Тоді довжина дуги L_{AB} обчислюється за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big(\rho(\varphi)\big)^2 + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}\, d\varphi\,.$$

Приклад. Знайти довжину кардіоїди $\rho = 6(1 + sin\varphi)$.

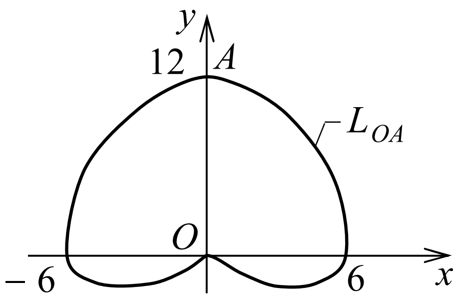

Рисунок 11

Розв'язання. Кардіоїда – замкнена лінія, що зображена на рис.11. Вона симетрична відносно осі Oy. Тому її довжину l можна знайти, подвоївши довжину l_1 її правої частини L_{OA}, що розташована в четвертій та першій чвертях і при цьому $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Проведемо обчислення: $\rho' = -6cos\varphi$;

$$\rho^2 + (\rho')^2 = \big(6(1 + sin\varphi)\big)^2 + (6cos\varphi)^2 =$$
$$= 36(1 + 2sin\varphi + sin^2\varphi + cos^2\varphi) = 36(2 + 2sin\varphi) =$$
$$= 72(1 + sin\varphi);$$

$$l_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{72(1 + sin\varphi)}\, d\varphi = 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + sin\varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 - sin\varphi}}{\sqrt{1 - sin\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - sin\varphi}}\, d\varphi = 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{cos^2\varphi}}{\sqrt{1 - sin\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\varphi}{\sqrt{1 - sin\varphi}}\, d\varphi = \left| \begin{matrix} u = 1 - sin\varphi; \\ du = -cos\varphi d\varphi; \\ u_{н} = 2;\ u_{в} = 0 \end{matrix} \right| = -6\sqrt{2} \int_{2}^{0} \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{u}\,\Big|_{0}^{2} = 24\,;\ \ l = 2l_1 = 48\ (\text{од.}).$$

РОЗДІЛ 5 ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Диференційним рівнянням називається рівняння, яке містить незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або її диференціали).

Порядком диференційного рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння. Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференційне рівняння *звичайне*. Загальний вигляд такого рівняння n – го порядку

$$f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

5.1 Диференційні рівняння першого порядку

Звичайне диференційне рівняння першого порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

Задача полягає у знаходженні невідомої функції, а процес визначення цієї функції називається розв'язанням, або інтегруванням диференційного рівняння.

Розв'язком, або інтегралом диференційного рівняння називається будь-яка диференційована на деякому інтервалі $x \epsilon (a, b)$ функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє цьому рівнянню, тобто така, що після підстановки її у рівняння маємо:

$$\varphi'(x) = F[x, \varphi(x)].$$

Загальним розв'язком диференційного рівняння називаються відношення виду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \text{або } \Phi(x, y) = C, \qquad \text{де } C = const \tag{3}$$

Частинним розв'язком диференційного рівняння називається такий розв'язок, який одержуємо з загального розв'язку (3) при деякому значенні довільної сталої C. Довільна стала C визначається з початкових умов. Число довільних сталих повинно відповідати порядку диференційного рівняння.

Задача пошуку розв’язку диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам $y = y_0$ при $x = x_0$ називається *задачею Коші.*

Розглянемо деякі диференціальні рівняння першого порядку.

5.1.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

Це найпростіший тип диференційних рівнянь першого порядку, але дуже важливий.

Нехай маємо диференційне рівняння першого порядку $F(x, y, y') = 0$, яке після розв’язання його відносно похідної y' набуває виду

$$f(x, y) + \varphi(x, y)y' = 0$$

Згадаємо, що $y' = \frac{dy}{dx}$, тому це рівняння можна записати у вигляді:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0.$$

Якщо $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, а $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, то маємо

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \qquad (4)$$

Рівняння (4) називається диференційним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Відокремлення змінних виконується шляхом ділення рівняння (4) на добуток $\varphi_1(x)\ f_2(y) \neq 0$. Рівняння (5)приймає вигляд:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0, \qquad (5)$$

а його загальний інтеграл записується так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Слід розглядати випадок, коли рішення рівняння $\varphi_1(x)f_2(y) = 0$ не належить до загального розв’язку. Ці рішення називаються особливими.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$xyy' = 1 - x^2$$

Розв’язання. Представимо y' як $y' = \frac{dy}{dx}$.

Маємо:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2, \quad xy\frac{dy}{dx} - (1 - x^2) = 0$$

Приведемо рівняння до виду (6). Для цього помножимо рівняння на дріб $\frac{dx}{x}$, де $x \neq 0$ та отримаємо

$$ydy - \frac{1 - x^2}{x}dx = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл: $\int ydy - \int \frac{1 - x^2}{x}dx = C.$

Маємо: $\frac{y^2}{2} - \ln x + \frac{x^2}{2} = C$ або $y^2 + x^2 - \ln x^2 = 2C -$ загальний розв′язок диференційного рівняння. Зауважимо, що цей розв’язок має сенс, коли $x > 0$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y - xy' = 1 + x^2y'.$$

Розв’язання. Запишемо рівняння у вигляді: $y - xy' - 1 - x^2y' = 0$;

$$y - 1 - (x + x^2)y' = 0.$$

Представимо y' як $y' = \frac{dy}{dx}$. Отримаємо: $(y - 1)dx - (x + x^2)dy = 0$. Приведемо останнє рівняння до виду (6). Поділимо його на

$(x + x^2)(y - 1) \neq 0$ і будемо мати рівняння:

$$\frac{dx}{x+x^2} - \frac{dy}{y-1} = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x+x^2} - \int \frac{dy}{y-1} = C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння після інтегрування має вигляд:

$$\ln\frac{x}{x+1} - \ln(y-1) = C \text{ або } y = \frac{Cx}{x+1} + 1.$$

5.1.2 Однорідні диференційні рівняння першого порядку

Якщо рівняння виду $y' = F(x,y)$ або $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не змінюються при заміні x на kx, y на ky і відповідно dx на kdy, а dy на kdy, y' на y' то вони називаються *однорідними.* Для рішення використовують *підстановку*:

$$y = U \cdot x$$

де $U(x)$ – нова функція, яка перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціюємо підстановку:

$$y' = U'x + U,$$

Після того, як нове рівняння буде проінтегроване, необхідно U замінити на $\frac{y}{x}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Розв'язання. Спочатку зробимо перевірку на однорідність. Зробимо заміну x на kx, y на ky, а $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{kdy}{kdx} = y'$, маємо:

$$kxy' - ky = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2};$$

$$k(xy' - y) = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)};$$

$$k(xy' - y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Після ділення обох частин рівняння на k ми отримаємо початкове рівняння, саме це і вказує, що дане рівняння – однорідне, тому використаємо наведену вище підстановку (7) та її похідну (8) і отримуємо рівняння:

$$x(U'x + U) - Ux = \sqrt{x^2 + x^2U^2};$$

$$x(U'x + U - U) = x\sqrt{1 + U^2},$$

розділимо обидві частини рівняння на $x \neq 0$, маємо: $U'x = \sqrt{1 + U^2}$ - це рівняння з відокремлюваними змінними; оскільки $U' = \frac{dU}{dx}$, то отримаємо рівняння виду:

$$\frac{dU}{dx}x = \sqrt{1 + U^2};$$

$$xdU - \sqrt{1 + U^2}dx = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на вираз $x\sqrt{1 + U^2} \neq 0$:

$$\frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримуємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \int \frac{dx}{x} = C,$$

$$\ln\left|U+\sqrt{1+U^2}\right| - \ln x = \ln C.$$

Загальний розв’язок диференційного рівняння має вид:

$$U+\sqrt{1+U^2} = Cx.$$

Так, як $U=\frac{y}{x}$, то маємо: $\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx$. Після тотожних перетворень отримуємо загальний розв’язок: $y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$(y^2-3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

Розв’язання. Виконаємо перевірку на однорідність, використовуючи заміни: x на kx, y на ky і відповідно dx на kdy, а dy на kdy. Маємо:

$$(k^2y^2-3k^2x^2)kdy + 2kxkykdx = 0,$$

$$k^3(y^2-3x^2)dy + 2k^3xydx = 0.$$

Поділимо весь вираз на k^3 і отримаємо початкове рівняння, отже це рівняння однорідне. Для використання підстановки необхідно розділити рівняння на dx, в результаті отримаємо:

$$(y^2-3x^2)y' + 2xy = 0.$$

Після відповідних підстановок матимемо:

$$(U^2x^2-3x^2)(U'x+U) + 2x^2U = 0,$$

$$U'x+U = \frac{-2U}{U^2-3}; \quad U'x = \frac{-2U}{U^2-3} - U; \quad U'x = \frac{U-U^3}{U^2-3} \ .$$

Заміною $U'=\frac{dU}{dx}$, отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dU}{dx}x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3}; \quad \frac{U^2 - 3}{U - U^3}dU = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{U^2 - 3}{U - U^3}dU - \int \frac{dx}{x} = C.$$

Виконавши інтегрування, маємо загальне рішення:

$$-3\ln U + \ln(1 + U) - \ln(1 - U) = \ln C + \ln x.$$

Використовуючи властивості логарифмічних функцій отримаємо:

$$\frac{U + 1}{U^3(1 - U)} = Cx.$$

Виконаємо зворотну підстановку $U = \frac{y}{x}$ і рішення буде мати вигляд:

$$\frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y^3}{x^3}\left(1 - \frac{y}{x}\right)} = Cx,$$

після виконання тотожних перетворень, остаточно маємо:

$$\frac{(y + x)x^2}{y^3(x - y)} = C.$$

5.1.3 Лінійні диференційні рівняння першого порядку

Диференційне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + p(x)y = g(x),$$

де $p(x)$ і $g(x)$ - задані функції, шукана функція y і її похідна y' входять в рівняння в першій степені.

Функції $p(x)$ і $g(x)$ передбачаються неперервними в проміжку (a, b), в якому шукається розв’язок лінійного диференційного рівняння.

Загальний розв'язок лінійного диференційного рівняння шукають підстановкою за методом Бернуллі, яка має вигляд добутку двох функцій:

$$y = U \cdot V,$$

де $U(x), V(x) -$ нові невідомі функції, причому $U(x) \neq 0$ довільна, $V(x) -$ підбирають такою, щоб виконувалась умова $V' + p(x)V = 0$.

Похідна від добутку двох функцій:

$$y' = U'V + UV'$$

Алгоритм розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку розглянемо на прикладах.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Розв'язання. Використовуючи підстановку та її похідну, рівняння запишемо у вигляді:

$$U'V + UV' + 2xUV = xe^{-x^2},$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

За умовою знаходження функції $V(x)$, другий доданок останнього рівняння дорівнює нулю, тобто:

$$V' + 2xV = 0\,,$$

а перший доданок буде дорівнювати функції $g(x)$, яка стоїть праворуч, тобто:

$$U'V = xe^{-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння: $V' + 2xV = 0$;

$$V' = -2xV; \quad \frac{dV}{dx} = -2xV; \quad \frac{dV}{V} = -2xdx; \quad \ln V = -x^2; \quad V = e^{-x^2}.$$

Вважаємо, що довільна стала тут дорівнює нулю.

Тепер розв'яжемо друге рівняння, але попередньо підставимо в нього знайдену функцію $V = e^{-x^2}$:

$$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2}; \;\; U' = x; \;\; \frac{dU}{dx} = x; \;\; dU = xdx; \;\; U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Знайдені функції записуємо у вигляді добутку і отримаємо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Приклад.. Розв'язати задачу Коші для рівняння:

$$y' - ytgx = secx; \;\; y|_{x=0} = 0.$$

Розв'язання. Використаємо розглянутий вище (приклад 6) алгоритм і в результаті отримаємо:

$$U'V + UV' - UVtgx = \frac{1}{cosx},$$

$$U'V + U(V' - Vtgx) = \frac{1}{cosx}.$$

Розв'яжемо рівняння: $V' - Vtgx = 0$;

$$V' = Vtgx; \;\; \frac{dV}{dx} = Vtgx; \;\; \frac{dV}{V} = tgxdx; \;\; lnV = -ln|cosx|; \;\; lnV = ln\frac{1}{cosx} \;;$$

$$V = \frac{1}{cosx}.$$

Тепер розв'яжемо рівняння $U'V = \frac{1}{cosx}$, підставимо в нього знайдене $V = \frac{1}{cosx}$:

$$U'\frac{1}{cosx} = \frac{1}{cosx}; \;\; U' = 1; \;\; dU = dx; \;\; U = x + C.$$

Знайдені функції дають загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = (x + C)\frac{1}{cosx}.$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, використовуючи задані початкові умови, тобто розв'яжемо задачу Коші:

$(0+C)\frac{1}{cos0}=0;\ C=0;$ тому частинне рішення буде мати вигляд:

$$y=\frac{x}{cosx}.$$

Лінійними рівняння можуть бути, як відносно y, так і відносно x.

5.2 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Визначення. Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння першого ступеня (лінійне) відносно шуканої функції та її похідної.

Лінійні ДР другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \qquad (*)$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина рівняння.

5.2.1 Лінійні однорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні однорідні диференційні рівняння (ДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають вигляд:

$$y''+a_1y'+a_2y=0,$$

де a_1 і a_2 сталі.

Частинний розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді

$$y=e^{kx},$$

де k - деяке число. Диференціюючи цю функцію двічі і підставляючи отримані значення в рівняння отримаємо:

$$k^2e^{kx}+a_1ke^{kx}+a_2e^{kx}=0,$$

$$e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0, \text{або}$$

$$k^2+a_1k+a_2=0 \quad (e^{kx}\neq 0).$$

Рівняння $k^2 + a_1k + a_2 = 0$ називається *характеристичним рівнянням* ДР (для його запису достатньо в початковому рівнянні замінити y'', y' і y відповідно на k^2, k і 1).

При розв'язанні характеристичного рівняння можливі три випадки:

Випадок 1. Корені k_1 і k_2 дійсні та різні: $D > 0, k_1 \neq k_2$.

В цьому випадку загальне рішення рівняння має вид:

$$\boxed{y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 5k + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 24 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2};\ k_1 = -2;\ k_2 = -3.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

Випадок 2. Корені k_1 і k_2 рівняння дійсні та рівні: $D = 0$,

$$k_1 = k_2 = k.$$

В цьому випадку загальний розв'язок рівняння має вид:

$$\boxed{y = e^{kx}(C_1x + C_2)}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - 8y' + 16 = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$D = 64 - 64 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = e^{4x}(C_1x + C_2)$.

Випадок 3. Корені k_1 і k_2 рівняння комплексні, нагадаємо, що $i^2 = -1$: $D < 0$, $x_{1,2} = \alpha \pm \beta$i. У цьому випадку загальне рішення рівняння має вид:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання.. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i; \quad \alpha = 2, \qquad \beta = 3.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' + 25y = 0$.

Розв'язання.. Характеристичне рівняння даного ДР має вид:

$$k^2 + 25 = 0;$$

$$k^2 = -25; \quad k_{1,2} = \pm 5i; \ \beta = 5.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

5.2.2 Лінійні неоднорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

називається лінійним неоднорідним диференційним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = y_o + \overline{y},$$

де y_o – загальний розв'язок однорідного рівняння, а $\overline{y}$ – частинне рішення нелінійного ДР, яке залежить від виду правої частини $f(x)$.

Розглянемо декілька типів $f(x)$:

Випадок 1. $f(x) = P_n(x)$,

де $P_n(x)$- многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$, тоді частинний розв'язок нелінійного ДР має вигляд:

$$\overline{y} = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n,$$

$\overline{y}$ многочлен степені *n*, а $B_0, B_1, \ldots, B_n$ - невідомі, які знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

Розв'язання. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 6k + 9 = 0;$$

$$D = 36 - 36 = 0;$$

$$k_{1,2} = 3.$$

Маємо загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = e^{3x}(C_1x + C_2)$.

Права частина: $f(x) = 2x^2 - x + 3$ –многочлен другої степені, тому

$$\overline{y} = B_0x^2 + B_1x + B_2.$$

Знайдемо $\overline{y}'$ та $\overline{y}''$ і підставимо в дане рівняння отримані значення відповідно замість y'', y' та y .

$$\overline{y}' = 2B_0x + B_1;$$

$$\overline{y}'' = 2B_0.$$

$$2B_0 - 6(2B_0x + B_1) + 9(B_0x^2 + B_1x + B_2) = 2x^2 - x + 3;$$

$$2B_0 - 12B_1x - 6B_2 + 9B_0x^2 + 9B_1x + 9B_2 = 2x^2 - x + 3.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти B_0, B_1 і B_2 за методом невизначених коефіцієнтів. Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^2|\ 9B_0 = 2, \qquad B_0 = \frac{2}{9}.$$

$$x|\ -12B_0 + 9B_1 = -1;\ \ -12 \cdot \frac{2}{9} + 9B_1 = -1;\ \ 9B_1 = -1 + \frac{8}{3};\ \ 9B_1 = \frac{5}{3};$$

$$B_1 = \frac{5}{27}.$$

$$x^0|\ 2B_0-6B_1+9B_2=3;\ \ 2\cdot\frac{2}{9}-6\cdot\frac{5}{27}+9B_2=3;\ \ \frac{4}{9}-\frac{10}{9}+9B_2=3;$$

$$9B_2=3+\frac{2}{3};\quad 9B_2=\frac{11}{3};\quad B_2=\frac{11}{27}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y}=\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}.$$

Розв'язок неоднорідного ДР: $y=y_o+\overline{y}$, тобто

$$y=e^{3x}(C_1x+C_2)+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}.$$

б) корені характеристичного рівняння $k_1=0$ і $k_2\neq 0,$ тоді

$$\overline{y}=(B_0x^n+B_1x^{n-1}+\cdots+B_n)\cdot x,$$

де $B_0,B_1,\dots,B_n$ - невідомі коефіцієнти.

Приклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$2y''+5y'=5x^2-2x-1.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$2k^2+5k=0;$$

$$k(2k+5)=0;$$

$$k_1=0,\qquad k_2=-\frac{5}{2}.$$

Отже, маємо загальне рішення однорідного ДР: $y_o=C_1+C_2e^{-\frac{5x}{2}}.$

Права частина $f(x)=5x^2-2x-1-$ степінь многочлена друга і $k_1=0,\ k_2\neq 0,$ тому

$$\overline{y}=(B_0x^2+B_1x+B_2)\cdot x=B_0x^3+B_1x^2+B_2x;$$

$$\overline{y}'=3B_0x^2+2B_1x+B_2;$$

$$\overline{y}''=6B_0x+2B_1.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'',\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$2(6B_0x+2B_1)+5(3B_0x^2+2B_1x+B_2)=5x^2-2x-1;$$

$$12B_0x+4B_1+15B_0x^2+10B_1x+5B_2=5x^2-2x-1.$$

Знайдемо коефіцієнти B_0, B_1 і B_2, як у попередньому прикладі:

$$x^2|\ 15B_0 = 5;\ \ B_0 = \frac{1}{3}.$$

$$x|\ 12B_0 + 10B_1 = -2;\ \ 12\cdot\frac{1}{3} + 10B_1 = -2;\ \ 10B_1 = -6;\ \ B_1 = -\frac{3}{5}.$$

$$x^0|\ \ 4B_1 + 5B_2 = -1;\ \ 4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 5B_2 = -1;\ \ 5B_2 = -1 + \frac{12}{5};\ \ 5B_2 = \frac{7}{5};$$

$$B_2 = \frac{7}{25}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Рішення диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{5x}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Випадок 2. $f(x) = e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$,

де $e^{\alpha x}$ - показникова функція, а $P^n(x)$- многочлен n-ї степені;

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n).$$

Приклад.**.** Розв'язати задачу Коші для диференційного рівняння

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3);\quad y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Розв'язання. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k = 0;$$

$$k(k-2) = 0;$$

$$k_1 = 0 \text{ і } k_2 = 2.$$

Загальне рішення однорідного ДР: $y_o = C_1 + C_2e^{2x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$. Тут $\alpha = 1$, $k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$ тому: $\overline{y} = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2)$;

$$\overline{y}' = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2) + e^x(2B_0x + B_1) =$$
$$= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1);$$
$$\overline{y}'' = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1) + e^x(2B_0x + B_1 + 2B_0) =$$
$$= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0 - 2(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1) =$$
$$= x^2 + x - 3;$$
$$B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0 - 2B_0x^2 - 2B_1x - 2B_2 - 4B_0x - 2B_1 =$$
$$= x^2 + x - 3;$$
$$-B_0x^2 - B_1x - B_2 + 2B_0 = x^2 + x - 3.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x^2| - B_0 = 1;\ \ B_0 = -1.$$
$$x|\ - B_1 = 1;\ \ B_1 = -1$$
$$x^0|\ - B_2 + 2B_0 = -3;\quad -B_2 - 2 = -3;\quad -B_2 = -1;\ \ B_2 = 1.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = e^x(-x^2 - x + 1).$$

Розв'язок диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Знайдемо частинний розв'язок даного ДР, підстановкою початкових умов в y та y' :

$$y' = 2C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1).$$
$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ 2C_2 + 1 - 1 = 2 \end{cases};\quad \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}.$$

Задача Коші для даного диференційного рівняння має вид:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

б) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x\ .$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3 - 4x).$$

Розв'язання. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k + 2 = 0;$$

$$D = 9 - 8 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2};\ k_1 = 2;\ k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^{2x}(3 - 4x)$. Тут $\alpha = 2,\ k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$.

Тому $\overline{y}$ має вигляд: $\overline{y} = e^{2x}(B_0 x + B_1) \cdot x = e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x)$;

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x) + e^{2x}(2B_0 x + B_1) = e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) + e^{2x}(4B_0 x + 2B_1 + 2B_0) =$$

$$= e^{2x}(4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 - 3(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) +$$

$$+2(B_0 x^2 + B_1 x) = 3 - 4x;$$

$$4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 - 6B_0 x^2 - 6B_1 x - 6B_0 x - 3B_1 +$$

$$+2B_0 x^2 + 2B_1 x = 3 - 4x;$$

$$2B_0 x + 2B_0 + B_1 = 3 - 4x.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x|\ 2B_0 = -4;\ \ B_0 = -2.$$

$$x^0|\ 2B_0 + B_1 = 3;\ -4 + B_1 = 3;\ \ B_1 = 7.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

Розв'язок рівняння має вид: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

в) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ і $k_2 = \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x^2.$$

Випадок 3. $f(x) = \mathrm{a}\cos\beta x + b\sin\beta x$,
де а і b - сталі.

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \pm\beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = A\,cos\,\beta x + B\,sin\,\beta x}\ ,$$

де A і B - невідомі коефіцієнти.

Приклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + 4y' + 13 = 5\,sin\,2x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = e^{-2x}(C_1\,cos\,3x + C_2\,sin\,3x)$.

Права частина рівняння: $f(x) = 5\,sin\,2x,\ \ k_{1,2} \neq \pm 2i.$

$$\overline{y} = A\,cos\,2x + B\,sin\,2x;$$

$$\overline{y}' = -2A\,sin\,2x + 2B\,cos\,2x;$$

$$\overline{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$

$$+13(A\cos 2x + B\sin 2x) = 5\sin 2x\,;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x +$$

$$+13A\cos 2x + 13B\sin 2x = 5\sin 2x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти. Для цього порівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ та $\cos 2x$:

$$\sin 2x| \; -4B - 8A + 13B = 5;$$

$$\cos 2x| -4A + 8B + 13A = 0.$$

Отримали систему рівнянь, яку розв'яжемо за правилом Крамера: $\begin{cases} -8A + 9B = 5 \\ 9A + 8B = 0 \end{cases};$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -64 - 81 = -145,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -45.$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{145} = -\frac{8}{29}, \;\; B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

б) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + y = \cos x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 1 = 0;$$
$$k^2 = -1;$$
$$k_{1,2} = \pm i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Права частина рівняння: $f(x) = \cos x$, $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = (A \sin x + B \cos x) \cdot x;$$
$$\overline{y}' = (A \cos x - B \sin x) \cdot x + A \sin x + B \cos x;$$
$$\overline{y}'' = (-A \sin x - B \cos x) \cdot x + A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ у початкове рівняння:

$$-(A \sin x + B \cos x) \cdot x + 2A \cos x - 2B \sin x + (A \sin x + B \cos x) \cdot x = \\ = \cos x;$$
$$2A \cos x - 2B \sin x = \cos x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos x \,|\; 2A = 1, \qquad A = \frac{1}{2}.$$
$$\sin x \,|\; 2B = 0, \qquad B = 0.$$

Отже, знайшли частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = \frac{1}{2} x \sin x.$$

Розв'язком даного диференційного рівняння є $y = y_o + \overline{y}$,:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Випадок 4. $f(x) = e^{\alpha x}(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$,

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\overline{y} = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДУ

$$y'' - 7y' + 6y = 2e^{2x} \cos x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 7k + 6 = 0;$$
$$D = 49 - 24 = 25;$$
$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2};\; k_1 = 6;\; k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1e^{6x} + C_2e^x$.

Права частина рівняння: $f(x) = 2e^{2x}\cos x,\ k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i,\ \alpha = 2,$ $\beta = 1$, тому частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{2x}(A\sin x + B\cos x);$$

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(A\cos x - B\sin x) =$$

$$= e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x) +$$

$$+e^{2x}(2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x - B\cos x) =$$

$$= e^{2x}(4A\sin x + 4B\cos x + 2A\cos x - 2B\sin x +$$

$$+ 2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x - B\cos x).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$4A\sin x + 4B\cos x + 2A\cos x - 2B\sin x + 2A\cos x -$$

$$-2B\sin x - A\sin x - B\cos x - 7(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x)$$

$$+ 6(A\sin x + B\cos x) = \cos x;$$

$$4A\sin x + 4B\cos x + 2A\cos x - 2B\sin x + 2A\cos x -$$

$$-2B\sin x - A\sin x - B\cos x - 14A\sin x - 14B\cos x - 7A\cos x +$$

$$+7B\sin x + 6A\sin x + 6B\cos x = \cos x;$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos x|\ 4B + 2A + 2A - B - 14B - 7A + 6B = 1,$$

$$\sin x|\ 4A - 2B - 2B - A - 14A + 7B + 6A = 0,$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} -3A - 5B = 1 \\ -5A + 3B = 0 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 25 = -34;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{34};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5, \qquad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{5}{34}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = e^{2x}\left(-\frac{3}{34}\sin x - \frac{5}{34}\cos x\right) = -e^{2x}\left(\frac{3}{34}\sin x + \frac{5}{34}\cos x\right).$$

Розв'язком даного диференційного рівняння є $y = y_o + \overline{y}$,:

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^x - e^{2x}\left(\frac{3}{34}\sin x + \frac{5}{34}\cos x\right).$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.

2. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 – Спеціальні розділи. – 368 с.

3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : АСТ, 2014. – Ч. 1 – 303 с., Ч. 2 – 415 с.

4. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.

5. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометри / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2005. – 240 с.

6. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський – Харків : ХНУМГ, 2015. – 255 с.

7. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2011. Т. 1. − 430 с.; Т. 2. − 580 с.

9. Розендорн Э. Р. Теория поверхностей / Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2006. – 304 с.

10. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
до організації самостійної роботи і проведення практичних занять
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

(*для студентів 1 курсу денної форми навчання
спеціальності 101 – Екологія)*
Модуль 1

Укладач **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2017, поз. 140 М

Підп. до друку 06.03.2020. Формат 60×84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк арк. 5,17.
Тираж 50 пр.   Зам. №

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет
міського господарства імені О.М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.